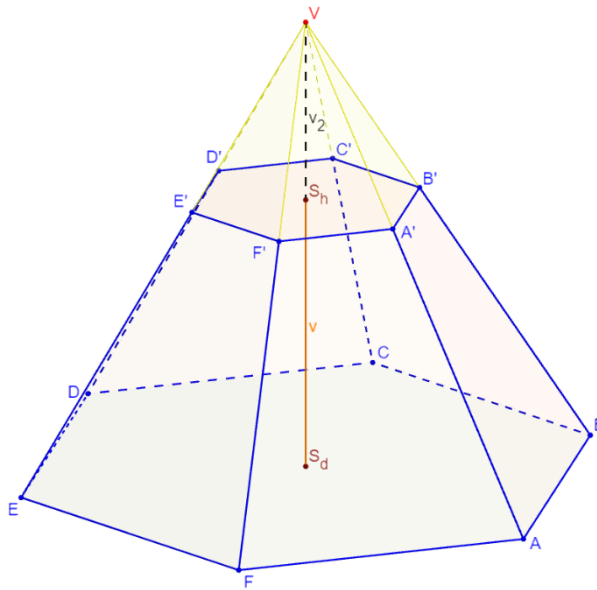


Povrch a objem zrezaného ihlana

Ak je daný jeden ihlan a zoberieme rovinu rovnobežnú s postavou, prechádzajúcu ihlanom, potom táto rovina rozdelí teleso na dve telesá. Jedno teleso je ihlan (pôvodný ihlan zmenšený – stredom rovnol'ahlosti je vrchol ihlana, koeficient rovnol'ahlosti je podiel výšok: výška zmenšeného ihlana delená výškou pôvodného). Druhé teleso je **zrezaný ihlan** (ABCDEF A'B'C'D'E'F').



podstavy (dolná: ABCDEF a horná: A'B'C'D'E'F') – dva rovnobežné, podobné mnohoúhelníky

výška telesa: v – vzdialenosť podstáv

hrana podstavy (podstavná hrana: AB, BC, ..., E'F', F'A') – strana podstavy

bočná hrana (AA', BB', CC', ... FF') – spojnica vrcholov dolnej a hornej podstavy

bočná stena (ABB'A', BCC'B', ...) – je ohraničená susednými bočnými hranami a dvomi podstavnými hranami

bočné steny sú lichobežníky

ich počet sa rovná počtu vrcholov (strán) podstavy

plášť zrezaného ihlana – súhrn bočných stien

kolmý zrezaný ihlan – ak pôvodný ihlan bol kolmý, aj zrezaný bude: spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou telesa)

pravidelný n-boký zrezaný ihlan – ak pôvodný ihlan bol pravidelný n-boký, aj zrezaný bude

podstavy sú pravidelné n-uhelníky

spojnica stredov podstáv je kolmá na podstavy (totožná s výškou telesa)

⇒ bočné steny sú rovnoramenné lichobežníky

⇒ bočné steny sú zhodné

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$$

$$V = \frac{v}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

Dô.

označme v pôvodnom ihlane objekty s indexom 1 – V_1, S_1, v_1

označme v zmenšenom ihlane objekty s indexom 2 – V_2, S_2, v_2

označme v zrezanom ihlane objekty bez indexu – V, S, v

objem zrezaného ihlana dostaneme ako rozdiel objemov:

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot v_1 - \frac{1}{3} S_2 \cdot v_2 \quad / \cdot 3$$

$$3V = S_1 \cdot v_1 - S_2 \cdot v_2 = S_1 \cdot (v + v_2) - S_2 \cdot v_2 = S_1 \cdot v + S_1 \cdot v_2 - S_2 \cdot v_2 = S_1 \cdot v + v_2 (S_1 - S_2)$$

$$3V = S_1 \cdot v + S_2 \cdot v_2 \left(\frac{S_1}{S_2} - 1 \right)$$

pre výšky platí

$$v = v_1 - v_2 \rightarrow v_1 = v + v_2$$

pre koeficient rovnol'ahlosti platí (opačná rovnol'ahlosť, ako v definícii zrezaného ihlana)

$$\lambda = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v + v_2}{v_2}$$

upravíme

$$\lambda \cdot v_2 = v + v_2$$

$$\lambda \cdot v_2 - v_2 = v$$

$$v_2(\lambda - 1) = v$$

potom pre obsahy podstáv platí

$$\lambda^2 = \frac{S_1}{S_2} \rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$

$$3V = S_1 \cdot v + S_2 \cdot v_2(\lambda^2 - 1) = S_1 \cdot v + S_2 \cdot v_2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

namiesto zvyrazneného výrazu pôjde v

$$3V = S_1 \cdot v + S_2 \cdot v(\lambda + 1) = S_1 \cdot v + S_2 \cdot v \cdot \lambda + S_2 \cdot v$$

$$3V = S_1 \cdot v + S_2 \cdot v \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} + S_2 \cdot v = S_1 \cdot v + v \cdot \sqrt{S_2^2 \frac{S_1}{S_2}} + S_2 \cdot v$$

po zjednodušení a vyňatí ostáva

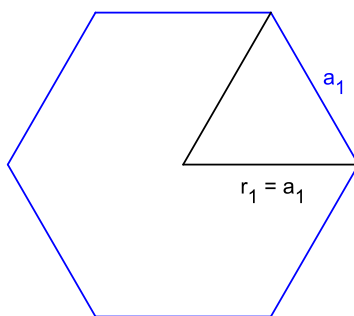
$$3V = S_1 \cdot v + v \cdot \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2 \cdot v = v(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$$

$$V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

príklad:

Vypočítajte povrch a objem pravidelného šesťbokého zrezaného ihlana, ak je dĺžka hrany dolnej podstavy 42, hornej podstavy 18 a ak dĺžka bočnej hrany je 37.

podstavy sú pravidelné šesťuholníky – rozdelíme ich na šesť rovnoramenných (sú vlastne rovnostranné) trojuholníkov



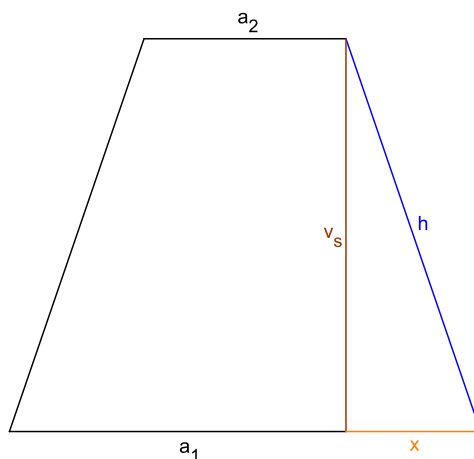
$$S_{\Delta 1} = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{a_1^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{42^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 441\sqrt{3} = 763,834$$

$$S_1 = 6 \cdot S_{\Delta 1} = 6 \cdot 763,834 = 4\,583,01$$

$$S_{\Delta 2} = \frac{a_2^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{18^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 81\sqrt{3} = 140,296$$

$$S_2 = 6 \cdot S_{\Delta 2} = 6 \cdot 140,296 = 841,777$$

plášť tvoria rovnoramenné lichobežníky



$$x = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{42 - 18}{2} = 12$$

$$v_s = \sqrt{h^2 - x^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1\,369 - 144} = 35$$

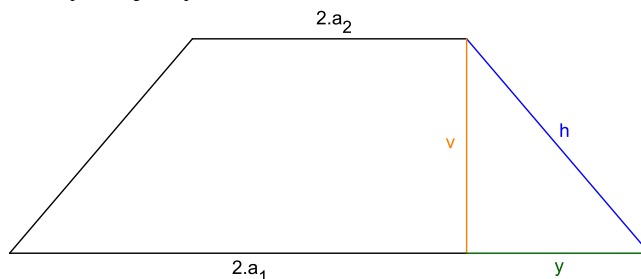
$$S_{pl} = 6 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot v_s = 6 \cdot \frac{42 + 18}{2} \cdot 35 = 6\,300$$

takže povrch

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 4\,583,0 + 841,78 + 6\,300$$

$$S = 11\,724,8$$

k objemu chýba ešte výška telesa – osový rez prechádzajúci protiľahlými bočnými hranami, je lichobežník, v ktorom výška je výškou telesa



$$y = \frac{2a_1 - 2a_2}{2} = \frac{2 \cdot 42 - 2 \cdot 18}{2} = 24$$

$$v = \sqrt{h^2 - y^2} = \sqrt{37^2 - 24^2} = \sqrt{1\,369 - 576} = \sqrt{793} = 28,160$$

$$V = \frac{v}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \frac{28,160}{3} (4\,583,01 + \sqrt{4\,583,01 \cdot 841,777} + 841,777)$$

$$V = 69\,358,0$$

Vypočítajte povrch a objem pravidelného štvorbokého zrezaného ihlana, ak je dĺžka hrany dolnej podstavy 22, hornej podstavy 12 a ak výška je 8.

podstavy sú štvorce

$$S_1 = a_1^2 = 22^2 = 484$$

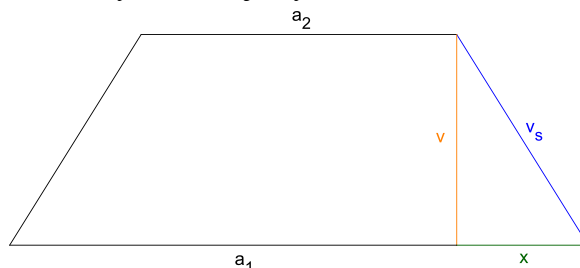
$$S_2 = a_2^2 = 12^2 = 144$$

výšku poznáme, takže teraz skôr vypočítame objem

$$V = \frac{v}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \frac{8}{3} (484 + \sqrt{484 \cdot 144} + 144)$$

$$V = 2\,378,67$$

ak zoberieme osový rez (lichobežník), ktorý prechádza stredmi protiľahlých hrán podstáv, ramená budú výšky bočných stien, a výška rezu je výška telesa



$$x = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{22 - 12}{2} = 5$$

$$v_s = \sqrt{v^2 + x^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} = 9,434$$

$$S_{pl} = 4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot v_s = 4 \cdot \frac{22 + 12}{2} \cdot 9,434 = 641,511$$

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 484 + 144 + 641,511$$

$$S = 1\,269,511$$

Vypočítajte povrch a objem pravidelného päťbokého zrezaného ihlana, ak je dĺžka hrany dolnej podstavy 24, hornej podstavy 10 a ak výška je 12.

$$S_1 = \frac{5}{4} \cdot \frac{a_1^2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{24^2}{\operatorname{tg} 36^\circ}$$

$$S_1 = 990,995$$

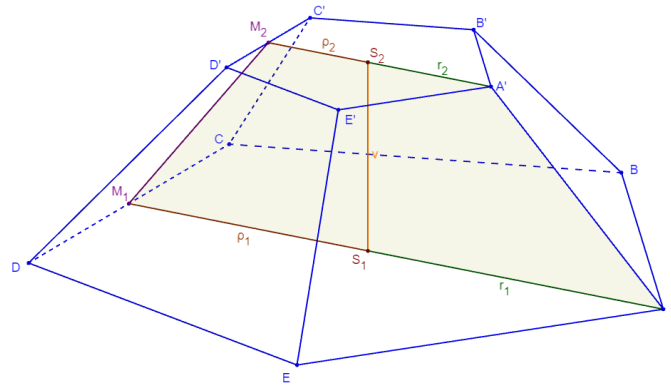
$$S_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{10^2}{\operatorname{tg} 36^\circ}$$

$$S_2 = 172,048$$

$$V = \frac{v}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \frac{12}{3} (990,995 + \sqrt{990,995 \cdot 172,048} + 172,048)$$

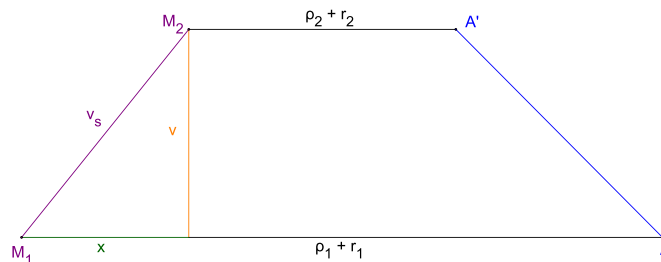
$$V = 6\,303,83$$

osový rez prechádzajúci stredmi podstav a bočnou hranou, prechádza stredmi protilahlých strán na podstavách – bodmi M_1 a M_2 → vznikne lichobežník



základne lichobežníkov rozdelia stredy podstav na dva úseky: sú to polomery vpísaných (ρ_1 a ρ_2) a polomery opísaných (r_1 a r_2) kružníc

jedno rameno lichobežníka je bočná hrana zrezaného ihlana a druhé je výška bočnej steny



vypočítame polomery vpísaných kružníc

$$\rho_1 = \frac{a_1}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{24}{2 \operatorname{tg} 36^\circ} = 16,517$$

$$\rho_2 = \frac{10}{2 \operatorname{tg} 36^\circ} = 6,882$$

$$x = \rho_1 - \rho_2 = 16,517 - 6,882 = 9,635$$

$$v_s = \sqrt{v^2 + x^2} = \sqrt{12^2 + 9,635^2} = 15,389$$

$$S_{pl} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot v_s = 5 \cdot \frac{24 + 10}{2} \cdot 15,389 = 1\,308,080$$

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 990,995 + 172,048 + 1\,308,080$$

$$S = 2\,471,123$$