Független kísérletek
(Nezávislé pokusy)

Egy urnában fehér és fekete golyók találhatók: 16 fehér és 20 fekete. Mi annak a valószínűsége, hogy ha ötöt kiveszünk, 3 fehér és 2 fekete lesz közötte?

A véletlen kísérletünket úgy is végrehajthatnánk, hogy egyszerre húznánk ki mind az öt golyót. De ugyanazt érjük el, ha egyesével húzzuk ki a golyókat, s közben félretesszük, majd folytatjuk a következő golyóval. Mintha a véletlen eseményemet elemi eseményekre bontanám → 5 kísérletre. Valójában ezen elemi események egyesítésével nem kapom meg a keresett valószínűséget (összeszorozva ezek valószínűségét). Viszont ebből az értékből bizonyos módon megkaphatom a helyes választ.

tegyük fel, hogy az első három alkalommal fehér golyót húzok, utána pedig két feketét
számoljunk fokozatosan a kísérlet minden külön lépését

az első fehér golyó kihúzásának a valószínűsége: $P(A_1) = \frac{16}{36}$

mikor a második fehér golyót húzom, az urnában már csak 15 golyó van a 35-ből: $P(A_2) = \frac{15}{35}$

a harmadik húzásnál 14 fehér golyóm maradt: $P(A_3) = \frac{14}{34}$

most a feketék következnek – van 20 fekete golyóm, de az összes golyók száma 33: $P(A_4) = \frac{20}{33}$

az utolsó fekete valószínűsége: $P(A_5) = \frac{19}{32}$

És mivel nem számoltam még? Miért nem a jó választ adja ezen valószínűségek egyszerű szorzata? A válasz egyszerű. Hisz azt az esetet számoltam, mikor az első három golyó fehér és utána következnek a feketék. De a célomat elérhetem más sorrenddel is. Vagyis a lehetséges sorrendet nem vettem figyelembe.

az összes lehetséges sorrend meghatározása kombinatorikai probléma – van öt üres helyünk, ezekből kell három helyet elfoglalni, melyek egyenértékűek (vagyis mely húzásoknál lesz a golyó fehér)
ezért öt elem harmadosztályú kombinációjáról van szó (független a sorrendtől, mert a fehér golyók egyformák)

$C_3(5) = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 10$

{wwwbb; wwbwb; wbwwb; bwwwb; wwbbw; wbwbw; bwwbw; wbbww; bwbww; bbwww}

M. Ugyan ezt kapnánk, ha a fekete golyókra összpontosítanánk – mely húzásoknál jön fekete golyó. A binomiális együtthatók tulajdonságainál tanultuk a következő tételt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

most már csak összeszorozzuk ezt a hat számot

$P(A) = P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4).P(A_5).C_3(5) = \frac{16}{36}.\frac{15}{35}.\frac{14}{34}.\frac{20}{33}.\frac{19}{32}.10 = 0{,}282\ 2$

P. Ezt az értéket más módon is megkaphatjuk. A valószínűség klasszikus meghatározásából.

a kedvező esetek száma: Hány különböző módon tudok 16 fehér golyóból kihúzni hármat és hozzá két feketét a 20-ból?

$m = C_3(16).C_2(20) = 560.190 = 106\ 400$

az összes lehetőség száma: Hányféleképp húzhatok ki öt golyót a 36-ból?

$n = C_5(36) = 376\ 992$

$P(A) = \frac{106\ 400}{376\ 992} = 0{,}282\ 2$

Ennél a kísérletnél minden „elemi esemény” eredménye befolyásolja a következő húzást. Vagyis a kísérletek (az az öt, amire az eredeti kísérletet bontottam) nem függetlenek. Ezért változtassunk az eredeti feladaton!

Egy urnában fehér és fekete golyók találhatók: 16 fehér és 20 fekete. Hajtsunk végre öt kísérletet úgy, hogy kihúzunk egy golyót, és azonnal vissza is tesszük. Mi annak a valószínűsége, hogy 3 fehér és 2 fekete lesz kisorsolva?

Ezt viszont már csak egy módon számolhatjuk ki. Meghatározzuk, hogy az egyes kísérleteknél mi annak a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk ki, illetve annak, hogy feketét (ami az egyes kísérletek során nem változik, mert mindig visszateszem a golyót – vagyis a golyók aránya nem változik). És most is számolok a fehér és fekete golyók húzásának lehetséges sorrendjével.

ismét feltételezzük az egyik lehetséges sorrendet: először három fehér, majd két fekete a fehér golyó kihúzásának a valószínűsége az első három kísérletnél egyforma:

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{16}{36}$

a fekete golyó kihúzásának a valószínűsége az utolsó két kísérletnél szintén azonos:

$P(A_4) = P(A_5) = \frac{20}{36}$

a lehetséges különböző sorrendek száma ugyanúgy számolandó

$C_3(5) = 10$

most már csak összeszorozni

$P(A) = \frac{16}{36}.\frac{16}{36}.\frac{16}{36}.\frac{20}{36}.\frac{20}{36}.10 = 0{,}271\,0$

És pontosan az ilyen kísérleteket nevezzük független kísérleteknek. Az előző kísérletek eredményei nem befolyásolják a következő kísérlet kimenetelét. Az esemény bekövetkezésének a valószínűsége minden kísérletnél megegyező.

T. (*Bernoulli*)

$P(x) = \binom{n}{x}p^x.q^{n-x} = \binom{n}{x}p^x.(1-p)^{n-x}$

n – az összes kísérlet számát jelöli

x – a kedvező kísérletek számát jelöli (hogy bekövetkezik az esemény, aminek a valószínűségét számolom

p – az esemény bekövetkezésének a valószínűségét jelöli az egyes kísérletek során

q – az esemény nembekövetkezésének a valószínűségét jelöli az egyes kísérletek során (az ellentett esemény) ⇒ q = 1 – p

A bevezető példánk ezek alapján így hangzana:

Egy urnában fehér és fekete golyók találhatók: 16 fehér és 20 fekete. Öt kísérletet végzünk úgy, hogy kihúzunk egy golyót, és azonnal vissza is tesszük. Mi annak a valószínűsége, hogy éppen háromszor húzunk fehéret?

$n = 5;\ x = 3;\ p = \frac{16}{36};\ q = \frac{20}{36}$

példa:

Hat független kísérletet hajtunk végre. Az egyes kísérletek során a siker 80 %-os. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy éppen x-szer sikerült a kísérletünk, az x = 0, 1, 2, …, 6 értékekre.

n = 6

$p = 0{,}8 \rightarrow q = 0{,}2$

$P(0) = \binom{6}{0}.0{,}8^0.0{,}2^6 = 1.1.0{,}000\,064 = 0{,}000\,064$

$P(1) = \binom{6}{1}.0{,}8^1.0{,}2^5 = 6.0{,}8.0{,}000\,32 = 0{,}001\,536$

$P(2) = \binom{6}{2}.0{,}8^2.0{,}2^4 = 15.0{,}64.0{,}001\,6 = 0{,}015\,36$

$P(3) = \binom{6}{3}.0{,}8^3.0{,}2^3 = 20.0{,}512.0{,}008 = 0{,}081\,92$

$P(4) = \binom{6}{4}.0{,}8^4.0{,}2^2 = 15.0{,}409\,6.0{,}04 = 0{,}245\,76$

$P(5) = \binom{6}{5}.0{,}8^5.0{,}2^1 = 6.0{,}327\,68.0{,}2 = 0{,}393\,216$

$P(6) = \binom{6}{6}.0{,}8^6.0{,}2^0 = 1.0{,}262\,144.1 = 0{,}262\,144$